

**Code :****Thème : CALCULS ALGÈBRIQUES****LEÇON 5 : CALCUL LITTÉRAL****Durée : 8 heures****A. SITUATION D'APPRENTISSAGE**

A la rentrée scolaire, au mois de septembre, une élève en classe de 4^{ème} dispose de 1 000 F dans sa tirelire.

Chaque mois, elle y met une pièce de 200 F économisée sur son argent de poche. Elle veut trouver une formule qui lui permettrait de connaître le montant de son épargne à un mois donné ($n^{\text{ième}}$ mois). Elle sollicite l'aide de ses camarades de classe pour déterminer son épargne en fonction du nombre de mois qu'elle aura épargné.

B. CONTENU DE LA LEÇON**I. Expressions littérales****1. Définition**

Une expression qui contient une ou plusieurs lettres est appelée **expression littérale**.

Exemples

$2a$; $(a - 5b)$; $2\pi r$; $3x + 4$... sont des expressions littérales.

2. Calcul de la valeur numérique d'une expression littérale

Méthode

- Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale qui contient une seule lettre, on remplace cette lettre par le nombre donné.
- Pour calculer la valeur numérique d'une expression littérale qui contient plusieurs lettres, on remplace ces lettres par les nombres donnés.

Exercices de fixation**Exercice 1**

On donne l'expression littérale A telle que : $A = 3x + 4$.

Calcule la valeur numérique de A pour $x = 5$.

Corrigé

Pour $x = 5$, $A = 3 \times 5 + 4 = 15 + 4 = 19$.

Exercice 2

On donne l'expression littérale E telle que: $E = a - 5b$.

Calcule la valeur numérique de E pour $a = 7$ et $b = 1$.

Corrigé

Pour $a = 7$ et $b = 1$, $E = 7 - 5 \times 1 = 7 - 5 = 2$.

3. Organisation d'un calcul

Règle d'écriture

Dans un produit, on n'écrit pas le symbole de la multiplication « $\times$ » avant une lettre ou avant une parenthèse ouvrante.

Exemples

On écrira $2x$ au lieu de $2 \times x$ ou $\times 2$.

On écrira ab au lieu de $a \times b$.

On écrira $2(x - 7)$ au lieu de $2 \times (x - 7)$.

On écrira $9(12 + p)(x - 7)$ au lieu de $9 \times (12 + p) \times (x - 7)$.

4. Suppression de parenthèses

Règles

Règle 1

Dans une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses sans rien changer si:

- La parenthèse ouverte est précédée du signe « $+$ ».
- Il n'y a aucun signe avant la parenthèse ouverte.

Exemple

$$(-7 + a) + (b - 3 + c) = -7 + a + b - 3 + c.$$

Exercice de fixation

Ecris l'expression suivante sans les parenthèses : $(2 - 3a + b) + (-m + t) - x$.

Corrigé

$$(2 - 3a + b) + (-m + t) - x = 2 - 3a + b - m + t - x.$$

Règle 2

Dans une somme algébrique, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe « $-$ » à condition de changer les signes qui précèdent les termes dans ces parenthèses.

Exemple

$$a - (b - 3 + c) = a - b + 3 - c.$$

Exercice de fixation

Ecris l'expression suivante sans les parenthèses :

$$x - (3a - b) - (-m + t - y)$$

Corrigé

$$x - (3a - b) - (-m + t - y) = x - 3a + b + m - t + y.$$

5. Ordre de priorité des opérations

Règle

Pour calculer une somme algébrique :

- On effectue d'abord les opérations entre les parenthèses (s'il y'a en).
- En absence des parenthèses, on effectue dans l'ordre :
 - les calculs de puissances,
 - les multiplications et divisions,
 - les additions et soustractions.

Exemple

Calcule la somme algébrique A telle que : $A = 7 \times 3^2 - 2 \left(5 + \frac{1}{2} \right) + 4$.

$A = 7 \times 3^2 - 2 \left(5 + \frac{1}{2} \right) + 4$: J'effectue l'opération entre parenthèses.

$A = 7 \times 3^2 - 2 \times \frac{11}{2} + 4$: Je calcule la puissance de 3^2 .

$A = 7 \times 9 - 2 \times \frac{11}{2} + 4$: Je calcule les produits.

$A = 63 - 11 + 4$: Je calcule les sommes et les différences.

$A = 56$.

Exercice de fixation

Calcule la somme algébrique X telle que : $X = 4^3 + 8 \left(1 - \frac{3}{4} \right) - 6 \times \frac{2}{3} - 3$.

Corrigé

$$X = 4^3 + 8 \left(1 - \frac{3}{4} \right) - 6 \times \frac{2}{3} - 3$$

$$X = 4^3 + 8 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{2}{3} - 3$$

$$X = 64 + 8 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{2}{3} - 3$$

$$X = 64 + 2 - 4 - 3$$

$$X = 59.$$

II. Développement et réduction d'un produit

1. Définition

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

2. Développement des produits $a(x + y)$ et $a(x - y)$

Propriété

a, x et y sont des nombres rationnels.

- $a(x + y) = ax + ay$
- $a(x - y) = ax - ay$

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$a(x - y) = ax - ay$$

Remarque

On écrit :

- $2x$ et non x^2 .
- $2(x + 3)$ et non $(x + 3)^2$.
- 2×7 et non 2.7
- $2 \times (-9)$ et non 2×-9 .

Exercice de fixation

Développe chacun des produits suivants :

$$5(x + 7) ; -2,5(x - 4) ; 6(-10 - 2x).$$

Corrigé

$$5(x + 7) = 5x + 5 \times 7 = 5x + 35.$$

$$-2,5(x - 4) = -2,5x - 2,5 \times (-4) = -2,5x + 10.$$

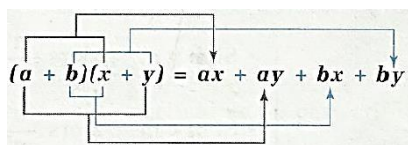
$$6(-10 - 2x) = 6 \times (-10) + 6 \times (-2x) = -60 - 12x.$$

3. Développement du produit $(a + b)(x + y)$

Propriété

a, b, x et y sont des nombres rationnels.

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$$



Exercice de fixation

Développe chacun des produits suivants :

$$(x + 5)(y + 3) ; (x + 2)(y - 3) ; (3x + 2)(2y - 1).$$

Corrigé

$$(x + 5)(y + 3) = xy + 3x + 5y + 15$$

$$(x + 2)(y - 3) = xy - 3x + 2y - 6$$

$$(3x + 2)(2y - 1) = 6xy - 3x + 4y - 2$$

4. Produits remarquables

Propriétés

a et b sont des nombres rationnels.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exercice de fixation

Développe chacun des produits suivants :

$$(a + 7)^2 ; (a - 3)^2 ; (a + 8)(a - 8).$$

Corrigé

$$(a + 7)^2 = a^2 + 2 \times a \times 7 + 7^2 = a^2 + 14a + 49.$$

$$(a - 3)^2 = a^2 - 2 \times a \times 3 + 3^2 = a^2 - 6a + 9.$$

$$(a + 8)(a - 8) = a^2 - 8^2 = a^2 - 64.$$

III. Factorisation

1. Factorisation par la mise en évidence d'un facteur commun

Définition

Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

Exemple

Factorisons les expressions littérales A et B telles que : $A = 3x + 3$; $B = 12x^2 - 18x$.

Corrigé

$$A = 3x + 3$$

$$A = 3x + 3 \times 1$$

$$A = 3(x + 1).$$

$$B = 12x^2 - 18x$$

$$B = 6x \times 2x - 6x \times 3$$

$$B = 6x(2x - 3).$$

Exercice de fixation

Factorise chacune des expressions littérales P, R et S suivantes :

$$P = 10 - 5a ; R = 2x(y - 1) + (y - 1) \text{ et } S = -x^2 + 2x.$$

Corrigé

$$P = 10 - 5a$$

$$P = 5 \times 2 - 5 \times a$$

$$P = 5(2 - a).$$

$$R = 2x(y - 1) + (y - 1)$$

$$R = 2x \times (y - 1) + 1 \times (y - 1)$$

$$R = (y - 1)(2x + 1).$$

$$S = -x^2 + 2x$$

$$S = -x \times x + 2 \times x$$

$$S = x(-x + 2).$$

2. Factorisation par l'utilisation de produits remarquables

Exemples

$$\bullet x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

$$\bullet x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x - 5)^2.$$

$$\bullet x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x - 11)(x + 11).$$

Exercice de fixation

Factorise chacune des expressions littérales M, N et L suivantes :

$$M = a^2 - 16; N = x^2 + 14x + 49 \text{ et } L = y^2 - 22x + 121.$$

Corrigé

$$M = a^2 - 16$$

$$M = a^2 - 4^2$$

$$M = (a + 4)(a - 4).$$

$$N = x^2 + 14x + 49$$

$$N = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2$$

$$N = (x + 7)^2.$$

$$L = y^2 - 22y + 121$$

$$L = y^2 - 2 \times y \times 11 + 11^2$$

$$L = (y - 11)^2.$$

C. SITUATION D'EVALUATION

Un collège Moderne dispose d'un champ subdivisé en deux parcelles toutes de forme rectangulaire.

Pour empêcher les animaux de pénétrer dans le champ, le bureau de la coopérative scolaire veut le clôturer à l'aide d'un grillage en prévoyant une porte en bois de largeur 1 m.

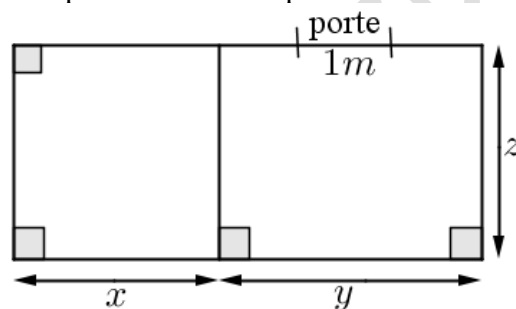
Le prix de la porte est de 10 000F CFA et le mètre de grillage coûte 1 500F CFA.

Averti, le trésorier affirme que la somme se trouvant dans la caisse est de 250 000F CFA.

Le président de la coopérative veut savoir si l'argent disponible en caisse est suffisant pour faire la clôture et la porte.

Le schéma ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur représente ce champ.

- 1) Justifie que le périmètre du champ est $2(x + y) + 2z$.
- 2) Calcule ce périmètre sachant que $x = 15$ m, $y = 30$ m et $z = 20$ m.
- 3) Justifie que le coût total des travaux est 203 500F CFA.
- 4) Réponds à la préoccupation du président de la coopérative.



Corrigé

- 1) Justifions que le périmètre du champ est $2(x + y) + 2z$

$$P = 2L + 2l \text{ avec } L = x + y \text{ et } l = z$$

$$P = 2(x + y) + 2z$$

$$P = 2(x + y) + 2z.$$

- 2) Calculons ce périmètre sachant que : $x = 15$ m, $y = 30$ m et $z = 20$ m

$$\text{On a : } P = 2(x + y) + 2z.$$

$$\text{Pour } x = 15 \text{ m, } y = 30 \text{ m et } z = 20 \text{ m, } P = 2(15 + 30) + 2 \times 20$$

$$P = 2 \times 45 + 2 \times 20$$

$$P = 90 + 40$$

$$P = 130 \text{ m.}$$

- 3) Justifions que le coût total des travaux est de 203 500F CFA.

Soit C le coût des travaux. La largeur de la porte est de 1 m, donc $(P - 1)$ est la longueur du grillage.

$$C = (P - 1) \times 1\,500 + \text{prix de la porte}$$

$$C = (130 - 1) \times 1\,500 + 10\,000$$

$$C = 129 \times 1\,500 + 10\,000$$

$$C = 193\,500 + 10\,000$$

$$C = 203\,500.$$

Donc, le coût total des travaux est de 203 500F CFA.

- 4) Répondons à la préoccupation du président de la coopérative

On va comparer la somme disponible dans la caisse au coût des travaux.

On a : $250\,000 > 203\,500$, donc l'argent disponible en caisse est suffisant pour les travaux.

D - EXERCICES

D -1 Exercices de fixation

Exercice 1

x, y et z sont des nombres entiers relatifs.

Ecris chacune des expressions suivantes sans les parenthèses.

$$8 + (x - 9) ; 7 - (-x - y)$$

$$y + (-x + y) ; z - (x - 9).$$

Corrigé

- $8 + (x - 9) = 8 + x - 9 = x - 1.$
- $7 - (-x - y) = 7 + x + y.$
- $y + (-x + y) = y - x + y = 2y - x.$
- $z - (x - 9) = z - x + 9.$

Exercice 2

Développe et réduis chacun des produits ci-dessous:

$$A = 3(x + 8)$$

$$B = -7(x - 8)$$

$$C = (x - 4)(y + 3)$$

$$D = (a + 5)(b - 7)$$

$$E = (x + 1)(x - 2)$$

$$F = (2x + 3)(x - 1)$$

Corrigé

$$A = 3(x + 8) = 3x + 24.$$

$$B = -7(x - 8) = -7x + 56.$$

$$C = (x - 4)(y + 3) = xy + 3x - 4y - 12.$$

$$F = (2x + 3)(x - 1) = 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3.$$

Exercice 3

Développe et réduis les expressions littérales A, B et C, en utilisant les produits remarquables.

$$A = (x + 7)^2$$

$$B = (y - 3)^2$$

$$C = (b - 3)(b + 3)$$

Exercice 4

Factorise les expressions littérales A, B, C, E et F suivantes :

$$A = 7a + 7$$

$$B = 6x - 9$$

$$C = 5x^2 + 12x$$

$$D = x^2 + 6x + 9$$

$$E = x^2 - 18x + 81$$

$$F = x^2 - 9.$$

D-2 Exercices de renforcement

Exercice 5

Réduis les expressions littérales E, F et G suivantes :

$$E = 5x - (1 + x + y); F = 5 - (1 - 2a) + (2a - 5); G = 15x^2 - (x - x^2) - 3x.$$

Exercice 6

a, x et y désignent des nombres rationnels.

Développe et réduis chacune des expressions littérales R, S, T, U, V et W ci-dessous :

$$\begin{aligned} R &= (2x + 7)(2x - 7) & S &= (5 - 2a)(5 + 2a) & T &= (3y - 7)(3y + 7) \\ U &= (x + 1)^2 - x(x + 2) & V &= xy + x + x(-y + 4) & W &= (x - 1)^2 - (3x - 1)^2 \end{aligned}$$

Corrigé

$$R = (2x + 7)(2x - 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49.$$

$$S = (5 - 2a)(5 + 2a) = 5^2 - (2a)^2 = 25 - 4a^2.$$

$$T = (3y - 7)(3y + 7) = (3y)^2 - 7^2 = 9y^2 - 49.$$

$$U = (x + 1)^2 - x(x + 2) = (x^2 + 2x + 1) - x^2 - 2x = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1.$$

$$V = xy + x + x(-y + 4) = xy + x - xy + 4x = 5x.$$

$$\begin{aligned} W &= (x - 1)^2 - (3x - 1)^2 = (x^2 - 2x + 1) - ((3x)^2 - 6x + 1) \\ &= x^2 - 2x + 1 - 9x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

$$W = -8x^2 + 4x.$$

Exercice 7

a et x désignent des nombres rationnels.

Factorise chacune des expressions littérales A, B, C, D, E et F ci-dessous :

$$\begin{aligned} A &= 14x - 21 & B &= 1 - 12a + 36a^2 & C &= 2ax - 10x \\ D &= 48x^2 - 16ax & E &= -5x - 8x^2 & F &= 36ax - 27 \end{aligned}$$

Corrigé

$$A = 14x - 21 = 7 \times 2x - 3 \times 7 = 7(2x - 3).$$

$$B = 1 - 12a + 36a^2 = 1^2 - 2 \times 6a + (6a)^2 = (1 - 6a)^2.$$

$$C = 2ax - 10x = 2 \times ax - 2 \times 5 = 2(ax - 5).$$

$$D = 48x^2 - 16ax = 16x \times 3x - 16x \times a = 16x(3x - a).$$

$$E = -5x - 8x^2 = -x(5 + 8x).$$

$$F = 36ax - 27 = 9 \times 4ax - 9 \times 3 = 9(4ax - 3).$$

Exercice 8

x désigne un nombre rationnel.

Factorise chacune des expressions littérales I, J, K, L, M et N ci-dessous :

$$I = x^2 + 14x + 49 \qquad J = 16x^2 - 8x + 1 \qquad K = 49x^2 - 16$$

$$L = x^2 + 14x + (x + 14)$$

$$M = (x + 1)^2 + x^2 + 2x + 1$$

$$N = (9x^2 - 1) + (3x + 1)$$

D- 3 Exercices d'approfondissement

Exercice 9

a et b sont des nombres rationnels.

Relie chaque expression à sa forme développée et réduite.

$(a - b)^2$	•	•	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b)$	•	•	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)^2$	•	•	$a^2 - b^2$

Exercice 10

1) Calcule chacun des nombres A, B et C suivants, en utilisant les produits remarquables.

$$A = 11^2$$

$$B = 19 \times 21$$

$$C = 12^2 - 11^2$$

2) Développe et réduis chacune des expressions littérales D, E, F et G suivantes :

$$D = 3(x - 12)$$

$$E = (x - 12)(-2x + 5)$$

$$F = (x - 6)^2 + (3 - x)(3 + x)$$

$$G = 2x(1 - 5x) + (x + 3)^2 - 3$$

3) Factorise chacune des expressions littérales H, I, J et K suivantes :

$$H = 7x + 14$$

$$I = 4x^2 - 20x + 25 + x(2x - 5)$$

$$J = (x + 4)(x + 2) + (x + 2)$$

$$K = (4x^2 - 9) - (2x + 3)$$

Corrigé

$$1) A = 11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 1 = 100 + 20 + 1 = 121.$$

$$B = 19 \times 21 = (20 - 1)(20 + 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399.$$

$$C = 12^2 - 11^2 = (12 + 11)(12 - 11) = 33 \times 1 = 33.$$

$$2) D = 3(x - 12) = 3x - 36.$$

$$E = (x - 12)(-2x + 5) = -2x^2 + 5x + 24x - 60 = -2x^2 + 29x - 60.$$

$$F = (x - 6)^2 + (3 - x)(3 + x) = x^2 - 12x + 6^2 + 3^2 - x^2 = -12x + 45.$$

$$G = 2x(1 - 5x) + (x + 3)^2 - 3 = 2x - 10x^2 + x^2 + 6x + 9 - 3 = -9x^2 + 8x + 6.$$

$$3) H = 7x + 14 = 7(x + 2).$$

$$I = 4x^2 - 20x + 25 + x(2x - 5) = (2x - 5)^2 + x(2x - 5)$$

$$= (2x - 5)(2x - 5) + x(2x - 5) = (2x - 5)(2x - 5 + x) = (2x - 5)(3x - 5).$$

$$J = (x + 4)(x + 2) + (x + 2) = (x + 4)(x + 2) + (x + 2) \times 1$$

$$= (x + 2)(x + 4 + 1) = (x + 2)(x + 5).$$

$$K = (4x^2 - 9) - (2x + 3) = (4x^2 - 3^2) - (2x + 3) = (2x + 3)(2x - 3) - (2x + 3) \times 1$$

$$= (2x + 3)[(2x - 3) - 1] = (2x + 3)(2x - 3 - 1) = (2x + 3)(2x - 4)$$

$$K = (2x + 3)(x - 2) \times 2 = 2(2x + 3)(x - 2).$$

Exercice 11

Calcule la valeur numérique de chacune des expressions littérales suivantes pour

$$x = \frac{1}{2}; y = 2 \text{ et } z = -1.$$

$$a) 3x + y - z$$

$$b) -x + 3y - 5z$$

$$c) x^2 - y^3 + z.$$

Propriété du MENETFP